MATHS II (P')

DURÉE : 4 heures

Dans ce problème $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes. On note $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$) l'ensemble des réels positifs ou nuls (resp. strictement positifs).

Soit n un entier naturel donné, $n \geqslant 2$. On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ sur le corps $\mathbb{C}$, et on note $b = (b_1, ..., b_n)$ sa base canonique. $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si A est un élément de $\mathfrak{M}$, on note Φ (A) l'endomorphisme de E qui admet A pour matrice dans la base b. On désigne par O_E et $O_{\mathfrak{M}}$ les éléments zéros de E et de $\mathfrak{M}$, et par I_n la matrice unité de $\mathfrak{M}$.

Pour deux éléments quelconques $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ de E on dit que x est supérieur ou égal à y [resp. que x est totalement supérieur à y] si l'on a : $x - y \in (\mathbb{R}_+)^n$ [resp. $x - y \in (\mathbb{R}_+^*)^n$] et l'on écrit alors : $x \geqslant y$ [resp. $x \gg y$].

Soit $A = (a_{k,j})$, $(k, j) \in \{1, ..., n\}^2$, un élément de $\mathfrak{M}$.

On dit que A est positive ou nulle [resp. totalement positive] si pour tout $(k, j) \in \{1, ..., n\}^2$ on a : $a_{k,j} \in \mathbb{R}_+$ [resp. $a_{k,j}, \in \mathbb{R}_+^*$], et on écrit alors $A \geqslant O_{\mathfrak{M}}$ [resp. $A \gg O_{\mathfrak{M}}$].

I

1° Montrer que la relation $\geqslant$ définie sur E est une relation d'ordre. A-t-on l'implication : $\forall (x, y) \in E^2 [(x \geqslant y \text{ et } x \neq y) \Rightarrow x \gg y]$?

2° Soit A une matrice de $\mathfrak{M}$ et soit $f = \Phi$ (A). Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. $A \geqslant O_{\mathfrak{M}}$ [resp. $A \gg O_{\mathfrak{M}}$].

b. $(\forall x \in E)(x \geqslant O_E \Rightarrow f(x) \geqslant O_E)$ [resp. $(x \geqslant O_E \text{ et } x \neq O_E) \Rightarrow f(x) \gg O_E$].

3° Soient $A = (a_{k,j})$ un élément de $\mathfrak{M}$ et $f = \Phi$ (A). On note $|A|$ la matrice $(|a_{k,j}|)$ et $|f|$ l'endomorphisme $\Phi(|A|)$. Montrer que s'il existe $x \in E$ vérifiant : $x \gg O_E$ et $f(x) = |f|(x)$ on a : $f = |f|$.

Tournez la page S. V. P.

ENS ST-CLOUD FONTENAY 81 -121-

II

Dans toute la suite A est un élément de $\mathfrak{M}$ donné, on suppose que $A \geqslant O_{\mathfrak{M}}$ et on note $f = \Phi(A)$. On munit E de la norme définie par $\|x\| = \sup_{k \in \{1, \ldots, n\}} |x_k|$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de E.

1° On considère l'ensemble $\mathfrak{A}$ suivant :

$$\mathfrak{A} = \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \exists x \in (\mathbb{R}_+)^n \quad x \neq O_E \text{ et } f(x) \geqslant \alpha x \}$$

Montrer que $\mathfrak{A}$ est non vide et que l'on a $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ où :

$$\mathfrak{A}_1 = \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \|x\| = 1 \text{ et } f(x) \geqslant \alpha x \}$$

2° Montrer que $\mathfrak{A}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. On désigne par ρ la borne supérieure de $\mathfrak{A}$.

3° *a.* Montrer que l'ensemble : $\{ x \mid x \in E, x \geqslant O_E \text{ et } \|x\| = 1 \}$ est une partie compacte de E.

b. Soit $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$ ayant une limite α dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\alpha \in \mathfrak{A}$. (On rappelle la propriété : de toute suite d'éléments d'un compact K de E on peut extraire une sous-suite convergente dans K.) En déduire que ρ est un élément de $\mathfrak{A}$.

III

On conserve les notations et les hypothèses de la partie précédente, et on suppose désormais qu'il existe des réels positifs ou nuls $a_0, a_1, \ldots a_m$ tels que la matrice $M = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_m A^m$ soit totalement positive.

1° *a.* Soit $x \in E$, $x \gg O_E$. Montrer que l'on a $f(x) \geqslant O_E$ et $f(x) \neq O_E$. On pose $y = \Phi(M)(x)$. Montrer que l'on a $f(y) \gg 0$. (On utilisera : $f \circ \Phi(M) = \Phi(M) \circ f$). En déduire que : $\rho > 0$.

b. Montrer qu'il existe $v \in E$ vérifiant : $v \gg O_E$ et $f(v) \geqslant \rho v$.

c. Soit $w \in E$ vérifiant $w \geqslant O_E$, $w \neq O_E$ et $f(w) \geqslant \rho w$.

Montrer que l'on a $f(w) = \rho w$ (en raisonnant par l'absurde, prouver qu'il existe z vérifiant : $z \gg O_E$ et $f(z) \gg \rho z$, et en déduire l'existence d'un élément ρ' de $\mathfrak{A}$ strictement supérieur à ρ).

Prouver que l'on a : $w \gg O_E$.

2° Pour toute matrice C de $\mathfrak{M}$ on note S (C) l'ensemble des valeurs propres de C dans $\mathbb{C}$, et, pour tout $\lambda \in S(C)$ on désigne par $E_\lambda(C)$ le sous-espace propre de l'endomorphisme $\Phi(C)$ relatif à λ.

a. Soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un élément non nul de $E_\rho(A)$.
On pose $|y| = (|y_1|, \ldots, |y_n|)$. Démontrer l'égalité : $f(|y|) = \rho |y|$ et en déduire que pour tout k, on a $y_k \neq 0$.

b. Montrer que la dimension de $E_\rho(A)$ est égale à 1.

c. Démontrer que, pour tout $\lambda \in S(A)$, on a $|\lambda| \leqslant \rho$.

d. Que peut-on dire de $S({}^tA)$ et de la dimension de $E_\rho({}^tA)$? (^tA désigne la transposée de la matrice A.)

3° Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose : $D(\lambda) = A - \lambda I_n$, $\Delta(\lambda) = \det(D(\lambda))$. On désigne par $b_{k,j}(\lambda)$ le cofacteur de l'élément d'indice (j, k) de $D(\lambda)$ et par $B(\lambda)$ la matrice $(b_{k,j}(\lambda))$, c'est-à-dire la transposée de la comatrice de $D(\lambda)$.

a. Montrer que, pour tout $\lambda \in S(A)$, les vecteurs colonnes de $B(\lambda)$ appartiennent à $E_\lambda(A)$.

b. Montrer qu'il existe $(k, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $b_{k,j}(\rho) \neq 0$. En déduire que tous les coefficients de la matrice $B(\rho)$ sont non nuls et ont le même signe. (On utilisera la matrice ^tA.)

c. On rappelle que si l'on se donne n fonctions dérivables, $t \longmapsto v_k(t)$, de $\mathbb{R}$ dans E, la fonction $t \longmapsto \det_b(v_1(t), \ldots, v_n(t))$ est alors dérivable, et sa dérivée est :

$$\sum_{k=1}^{n} \det_b \left(v_1(t), \ldots, v_{k-1}(t), v_k'(t), v_{k+1}(t), \ldots, v_n(t) \right).$$

En calculant la dérivée de la fonction $\lambda \longmapsto \Delta(\lambda)$, montrer que ρ est racine simple de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$.

4° Soit $\gamma \in S(A)$ tel que $|\gamma| = \rho$, on pose $\gamma = \rho e^{i\varphi}$.

a. Soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un élément non nul de $E_\gamma(A)$.
Montrer que l'on a $f(|y|) = \rho |y|$ et $|y| \gg O_E$.

1921

b. On pose

$$\gamma_k = |\gamma_k| e^{i\theta_k} \quad , \quad H(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

$F = e^{-i\varphi} \; H(\gamma)^{-1} AH(\gamma)$.

En utilisant le résultat de la question I. 3°, montrer que $F = |F| = A$.

c. En déduire que lorsque γ est racine simple de l'équation : $\Delta(\lambda) = 0$. Prouver qu'il existe un unique élément y de $E_\gamma(A)$ vérifiant $y_1 = 1$.

Dans la suite, on note H la matrice $H(y)$ associée à cet élément y.

d. Montrer que l'application : $\lambda \longmapsto \lambda e^{i\varphi}$ définit une permutation de S (A), et, en utilisant Φ (H), exprimer $E_{\lambda e^{i\varphi}}(A)$ en fonction de $E_\lambda(A)$.

5° Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ les éléments de S(A) ayant pour module ρ.

On pose $\gamma_k = \rho e^{i\varphi_k}$ et $G = \{ e^{i\varphi_k} / k \in \{1, \ldots, h\} \}$

a. Montrer que G est un groupe pour la multiplication.

b. En déduire que G est l'ensemble des racines $h^{\text{ièmes}}$ de 1.

c. Soit $\gamma = \rho e^{i\varphi}$ où $\varphi = \dfrac{2\pi}{h}$; H étant la matrice associée à γ comme au 4° *c*, démontrer l'égalité : $H^h = I_n$.

6° Si σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et C un élément de $\mathfrak{M}$, on note $\sigma * C$ la matrice de Φ (C) dans la base $(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$.

a. On conserve les notations de la question 5° *c*.

Montrer qu'il existe une permutation σ telle que la matrice $\sigma * H$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 E_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s E_s \end{pmatrix}$$

où E_p est la matrice unité d'ordre n_p, $p \in \{1, \ldots, s\}$, avec $n_1 + \ldots + n_s = n$, $\mu_p = e^{i\alpha_p \varphi}$, et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont des entiers naturels vérifiant :

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s < h$$

b. En écrivant

$$\sigma * A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,s} \end{pmatrix}$$

où $A_{p,q}$ est une matrice ayant n_p lignes et n_q colonnes, démontrer que :

$$\forall (p, q) \in \{1, \ldots, s\}^2 \qquad e^{i\varphi} A_{p,q} = \frac{\mu_q}{\mu_p} A_{p,q}$$

Prouver ensuite les égalités :

$$\alpha_2 = 1, \ldots, \quad \alpha_p = p - 1, \ldots, \quad \alpha_s = s - 1;$$

Montrer que $A_{p,q}$ est nulle si $q - p$ n'est pas congru à 1 modulo s et que l'on a : $s = h$.

(On montrera que l'hypothèse faite sur M implique : $\forall p \; \exists q \quad A_{p,q} \neq 0$.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail